Zadania maturalne

Tomasz Rogala
Instytut Matematyki Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego. Szkoła Nauk Ścisłych
Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego

Zadanie 1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Równanie

$$\frac{(4x-6)(x-2)^2}{2x(x-1,5)(x+6)} = 0 \tag{1}$$

ma w zbiorze liczb rzeczywistych

A dokładnie jedno rozwiązanie: $x = 2$.

B dokładnie dwa rozwiązania: $x = 1,5$ oraz $x = 2$.

C dokładnie trzy rozwiązania: $x = -6, x = 0$ oraz $x = 2$.

D dokładnie cztery rozwiązania: $x = -6, x = 0, x = 1,5$ oraz $x = 2$.

Rozwiązanie. Najpierw musimy sprawdzić, kiedy lewa strona równania (1) jest dobrze określona. Nie można dzielić przez zero, więc musi być spełniony warunek

$$2x(x-1,5)(x+6) \neq 0.$$

Warunek ten jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy $x \neq 0, x \neq 1,5$ oraz $x \neq -6$. Tak więc zakładamy, że

$$x \neq 0, \quad x \neq 1,5 \quad \text{oraz} \quad x \neq -6. \tag{2}$$

Teraz możemy rozwiązać równanie (1). Mnożąc obie jego strony przez $2x(x-1,5)(x+6)$, dostajemy

$$(4x-6)(x-2)^2 = 0.$$

Ostatnia równość jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy

$$4x-6=0 \quad \text{lub} \quad x-2=0,$$

co ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x = 1,5 \quad \text{lub} \quad x = 2.$$

Na mocy założenia (2) liczba $1,5$ nie może być rozwiązaniem równania (1). Natomiast liczba 2 spełnia to założenie.

Tym samym liczba 2 jest jedynym rozwiązaniem równania (1). Oznacza to, że prawidłową odpowiedzią jest odpowiedź **A**. □

Zadanie 2. Dany jest wielomian

$$W(x) = 3x^3 + kx^2 - 12x - 7k + 12, \tag{3}$$

gdzie k jest pewną liczbą rzeczywistą. Wiadomo, że liczba -2 jest pierwiastkiem tego wielomianu.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba k jest równa

A 2. **B** 4. **C** 6. **D** 8.

Rozwiązanie. Skoro liczba -2 jest pierwiastkiem tego wielomianu, więc $W(-2) = 0$. Mamy zatem

$$\begin{aligned} 0 = W(-2) &= 3 \cdot (-2)^3 + k \cdot (-2)^2 - 12 \cdot (-2) - 7k + 12 = \\ &= 3 \cdot (-8) + 4k + 24 - 7k + 12 = \\ &= -24 + 4k + 24 - 7k + 12 = 12 - 3k. \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} 12 - 3k &= 0 \\ -3k &= -12 \quad | : (-3) \\ k &= 4. \end{aligned}$$

Tym samym prawidłową odpowiedzią jest odpowiedź **B**. □

Zadanie 3. Liczba $\log_2 32 - \log_2 8$ jest równa

A 2. **B** 14. **C** 16. **D** 24.

Rozwiązanie. Następujące twierdzenie opisuje dwie własności logarytmów.

Twierdzenie 1. *Niech $a \in (0, 1) \cup (1, \infty), b > 0$ i $r \in \mathbb{R}$. Wtedy*

$$\log_a a = 1 \tag{4}$$

oraz

$$\log_a b^r = r \cdot \log_a b. \tag{5}$$

Zauważmy, że $32 = 2^5$ oraz $8 = 2^3$.

Korzystając ze wzoru (5), mamy

$$\begin{aligned} \log_2 32 - \log_2 8 &= \log_2 2^5 - \log_2 2^3 = \\ &= 5 \cdot \log_2 2 - 3 \cdot \log_2 2. \end{aligned}$$

Natomiast zgodnie ze wzorem (4) mamy $\log_2 2 = 1$. Zatem ostatecznie

$$\begin{aligned} \log_2 32 - \log_2 8 &= \log_2 2^5 - \log_2 2^3 = \\ &= 5 \cdot \log_2 2 - 3 \cdot \log_2 2 = 5 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 5 - 3 = 2. \end{aligned}$$

Tym samym prawidłową odpowiedzią jest odpowiedź **A**. □

Zadanie 4. Jednym z rozwiązań równania

$$5(x + 1) - x^2(x + 1) = 0 \tag{6}$$

jest liczba

A 1. **B** -1. **C** 5. **D** -5.

Rozwiązanie. Wyciągniemy $(x+1)$ przed nawias w lewej stronie równania (6), tzn.

$$(x+1)\cdot(5-x^2)=0.$$

Teraz skorzystamy ze wzory skróconego mnożenia

$$\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta).$$

Stąd

$$(x+1)\cdot(\sqrt{5}+x)\cdot(\sqrt{5}-x)=0.$$

Lewa strona ostatniej równości zeruje się wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x=-1 \quad \text{lub} \quad x=-\sqrt{5} \quad \text{lub} \quad x=\sqrt{5}.$$

Tak więc rozwiązaniami równania (6) są liczby $-1, -\sqrt{5}$ oraz $\sqrt{5}$. Tym samym prawidłową odpowiedzią jest odpowiedź **B**. □

Zadanie 5. Liczba $\frac{8^{-40}}{2^{10}}$ jest równa

A 4^{-4}. **B** 4^{-50}. **C** 2^{-47}. **D** 2^{-130}.

Rozwiązanie. Będziemy korzystali z własności potęg opisanych w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 2. *Niech $a\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ i niech $m,n\in\mathbb{R}$. Wtedy*

$$(a^n)^m=a^{n\cdot m} \tag{7}$$

oraz

$$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}. \tag{8}$$

Ze wzoru (7) mamy

$$8^{-40}=(2^3)^{-40}=2^{3\cdot(-40)}=2^{-120}.$$

Teraz korzystając ze wzoru (8), dostajemy

$$\frac{8^{-40}}{2^{10}}=\frac{2^{-120}}{2^{10}}=2^{-120-10}=2^{-130}.$$

Tym samym prawidłową odpowiedzią jest odpowiedź **D**. □

Zadanie 6. Liczba $(5-2\sqrt{3})^2$ jest równa

A $25+4\sqrt{3}$. **B** $25-4\sqrt{3}$. **C** $37+20\sqrt{3}$. **D** $37-20\sqrt{3}$.

Rozwiązanie. Na mocy wzoru skróconego mnożenia

$$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$$

mamy

$$\begin{aligned}(5-2\sqrt{3})^2 =& 5^2-2\cdot5\cdot2\sqrt{3}+(2\sqrt{3})^2=\\ =& 25-20\sqrt{3}+4\cdot3=25-20\sqrt{3}+12=37-20\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Zatem prawidłową odpowiedzią jest odpowiedź **D**. □

Zadanie 7. Cenę x (w złotych) pewnego towaru obniżono najpierw o 30%, a następnie obniżono o 20% w odniesieniu do ceny obowiązującej w danym momencie. Po obydwu tych obniżkach cena towaru jest równa

A $0,36 \cdot x$ złotych. **B** $0,44 \cdot x$ złotych. **C** $0,50 \cdot x$ złotych. **D** $0,56 \cdot x$ złotych.

Rozwiązanie. Na początku cenę towaru obniżono o 30%, tzn. obniżono ją do poziomu

$$x - 30\% \cdot x = x - 0,3 \cdot x = 0,7 \cdot x.$$

Następnie z poziomu $0,7 \cdot x$ cenę tego towaru obniżono o 20%, tzn. obniżono ją do poziomu

$$\begin{aligned} 0,7 \cdot x - 20\% \cdot (0,7 \cdot x) &= 0,7 \cdot x - 0,2 \cdot 0,7 \cdot x = \\ &= 0,7 \cdot x - 0,14 \cdot x = 0,56 \cdot x. \end{aligned}$$

Tak więc końcowa cena tego towaru wyniosła $0,56 \cdot x$. Prawidłową odpowiedzią jest więc odpowiedź **D**. □

Zadanie 8. W trójkącie miary kątów są równe $\alpha, 4\alpha$ oraz $\alpha + 30^\circ$. Miara największego kąta tego trójkąta jest równa

A 55°. **B** 90°. **C** 100°. **D** 120°.

Rozwiązanie. Suma miar kątów wewnętrznych w trójkącie jest równa 180°. Wobec tego dostajemy równanie

$$\alpha + 4\alpha + (\alpha + 30^\circ) = 180^\circ.$$

Rozwiążmy to równanie

$$\begin{aligned} \alpha + 4\alpha + (\alpha + 30^\circ) &= 180^\circ \\ \alpha + 4\alpha + \alpha + 30^\circ &= 180^\circ \\ 6\alpha + 30^\circ &= 180^\circ \\ 6\alpha &= 180^\circ - 30^\circ \\ 6\alpha &= 150^\circ \quad | : 6 \\ \alpha &= 25^\circ. \end{aligned}$$

Skoro $\alpha = 25^\circ$, więc ten trójkąt ma kąty o następujących miarach

$$\begin{aligned} \alpha &= 25^\circ, \\ 4\alpha &= 4 \cdot 25^\circ = 100^\circ, \\ &\text{oraz} \\ \alpha + 30^\circ &= 25^\circ + 30^\circ = 55^\circ. \end{aligned}$$

Spośród kątów $25^\circ, 100^\circ$ oraz 55° największą miarę ma kąt 100°. Tak więc prawidłową odpowiedzią jest odpowiedź **C**. □

Zadanie 9. Rozwiąż nierówność

$$2(x+1)(x-3) < x^2 - 9. \tag{9}$$

Rozwiązanie. Najpierw doprowadzimy nierówność (9) do prostszej postaci. Mamy

$$\begin{aligned} 2(x+1)(x-3) &< x^2-9 \\ 2(x^2-3x+x-3) &< x^2-9 \\ 2(x^2-2x-3) &< x^2-9 \\ 2x^2-4x-6 &< x^2-9 \\ 2x^2-4x-6-x^2+9 &< 0 \\ x^2-4x+3 &< 0. \end{aligned}$$

Lewa strona ostatniej nierówności, tzn.

$$x^2-4x+3 \tag{10}$$

jest trójmianem kwadratowym. Policzmy jego wyróżnik. Mamy

$$\begin{aligned} \Delta = B^2-4AC &= (-4)^2-4\cdot 1\cdot 3 = \\ &= 16-12 = 4 > 0. \end{aligned}$$

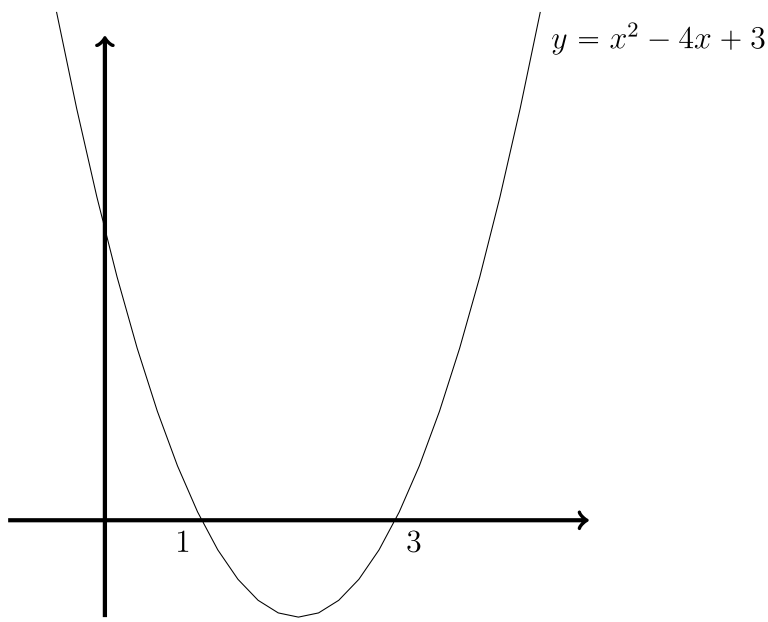
Ponieważ $\Delta > 0$, więc trójmian (10) ma dwa różne pierwiastki. Są nimi

$$x_1 = \frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{-(-4)-\sqrt{4}}{2\cdot 1} = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

oraz

$$x_2 = \frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{-(-4)+\sqrt{4}}{2\cdot 1} = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Narysujmy przybliżony wykres trójmianu (10). Ponieważ współczynnik $A > 0$, więc ramiona wykresu tego trójmianu są zwrócone do góry. Skoro $x_1 = 1$ oraz $x_2 = 3$ są pierwiastkami tego trójmianu, więc jego wykres przecina oś OX w punktach 1 oraz 3. Przybliżony wykres tego trójmianu będzie więc wyglądał następująco



Widzimy stąd, że trójmian (10) przyjmuje wartości ujemne dla każdego $x \in (1,3)$. Innymi słowy, nierówność $x^2-4x+3 < 0$ jest spełniona dla każdego $x \in (1,3)$. Tym samym rozwiązaniem nierówności (9) jest przedział $(1,3)$. $\square$